# HISTORIA MATEMATYKI

## OD CZASÓW NAJDAWNIEJSZYCH DO POCZĄTKU XIX STULECIA

W trzech tomach

Pod redakcją A. P. JUSZKIEWICZA

# HISTORIA MATEMATYKI

## Tom drugi

## MATEMATYKA XVII STULECIA

Tłumaczył
STANISŁAW DOBRZYCKI

WARSZAWA 1976
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

Dane oryginału:

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ С ДРЕВНЕЙШИХ ВРЕМЕН
ДО НАЧАЛА XIX СТОЛЕТИЯ

Под редакцией А. П. Юшкевича

Wojewódzka Biblioteka Publiczna w Katowicach
51(091)
29745/II
29746

Том второй

МАТЕМАТИКА XVII СТОЛЕТИЯ

Авторский коллектив тома:

доктор физ.-матем. наук И. Г. БАШМАКОВА
кандидат физ.-матем. наук Л. Е. МАЙСТРОВ
доктор физ.-матем. наук. Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД, М. В. ЧИРИКОВ
кандидат физ.-матем. наук О. Б. ШЕЙНИН
доктор физ.-матем. наук А. П. ЮШКЕВИЧ

Академия Наук СССР
Институт Истории Естествознания и Техники

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА"
МОСКВА 1970

K 30853P
478158 II

Okładkę i obwolutę projektowała

*Maria Łuszczyńska*

Redaktor

*Janina Solarska*

Redaktor techniczny

*Eugeniusz Szkudaj*

Korektor

*Wanda Rogatkowa*

K-21/23.02.76
A-06/1/714
21.3.
[10]
Śląska Biblioteka

# SPIS RZECZY

Rozdział pierwszy. **Ogólna charakterystyka matematyki XVII wieku** *(A. P. Juszkiewicz)* . . . 9

Rewolucja naukowa czasów nowożytnych . . . 9
Mechaniczny model świata a matematyka . . . 11
Matematyka XVII w. a problemy praktyki . . . 14
Szczególne cechy matematyki XVII wieku . . . 18
Organizacja pracy naukowej . . . 20

Rozdział drugi. **Arytmetyka i algebra** *(A. P. Juszkiewicz)* . . . 26

Osiągnięcia algebry w pracach Harriota i Girarda . . . 26
Matematyka uniwersalna Kartezjusza . . . 30
Rozszerzenie pojęcia liczby . . . 38
Liczby ujemne i urojone . . . 40
Ułamki dziesiętne i ciągłe . . . 43
Algebra Kartezjusza . . . 46
Algebra w drugiej połowie XVII wieku . . . 50
Twierdzenie Rolle'a . . . 52
Przybliżone rozwiązywanie równań . . . 53
Zagadnienie rozwiązania równania przez pierwiastniki . . . 57
Wyznaczniki . . . 59

Rozdział trzeci. **Pomocnicze środki rachunkowe** *(M. W. Czirikow, A. P. Juszkiewicz)* . . . 61

Odkrycie logarytmów . . . 61
Logarytmy Bürgiego . . . 62
Logarytmy Nepera . . . 63
Logarytmy dziesiętne . . . 69
Rosyjskie liczydła . . . 71
Pałeczki Nepera . . . 73
Suwak logarytmiczny . . . 73
Maszyny rachunkowe . . . 74

Rozdział czwarty. **Teoria liczb** *(I. G. Baszmakowa)* . . . 78

Narodziny teorii liczb . . . 78
Pierre Fermat . . . 78
Liczby pierwsze . . . 81
Małe twierdzenie Fermata . . . 82
Formy kwadratowe . . . 82
Równania nieoznaczone . . . 83

Rozwiązanie równań nieoznaczonych w liczbach wymiernych . . . 85
Wielkie twierdzenie Fermata . . . 87
Metoda regresji . . . 87
Znaczenie problemów Fermata . . . 88

Rozdział piąty. **Kombinatoryka i teoria prawdopodobieństwa** *(L. E. Majstrow, B. A. Rozenfeld, O. B. Szejnin)* . . . 90

Prehistoria teorii prawdopodobieństwa . . . 90
Osiągnięcia kombinatoryki . . . 92
Problemy probabilistyczne Pascala i Fermata . . . 95
Teoria prawdopodobieństwa Huygensa . . . 98
Badania statystyczne . . . 100
*Sztuka przewidywania* Jakuba Bernoulliego . . . 102

Rozdział szósty. **Geometria** *(B. A. Rozenfeld, A. P. Juszkiewicz)* . . . 108

Metody algebraiczne w geometrii . . . 108
Geometria analityczna . . . 109
Geometria analityczna Fermata . . . 111
Geometria analityczna Kartezjusza . . . 113
Pierwsi naśladowcy Kartezjusza w geometrii . . . 121
Współrzędne przestrzenne . . . 124
*Wyliczenie krzywych rzędu trzeciego* Newtona . . . 125
Pojęcie punktu nieskończenie dalekiego u Keplera . . . 129
Powstanie geometrii rzutowej . . . 132
Twierdzenie Pascala . . . 136
Zasada ciągłości Leibniza i idea *geometrii położenia* . . . 137
Przekształcenie rzutowe u Newtona . . . 139
Teoria równoległych . . . 140

Rozdział siódmy. **Metody nieskończonościowe** *(A. P. Juszkiewicz przy współpracy M. W. Czirikowa)* . . . 142

Odrodzenie metod Archimedesa . . . 142
Pierwsze uogólnienia metody wyczerpywania . . . 143
Zagadnienia analizy XVII wieku . . . 148
Nowe metody a ścisłość matematyczna . . . 149
Rozwój pojęcia funkcji . . . 152
Analityczne przedstawienie funkcji . . . 155
Definicja pojęcia funkcji . . . 156
Ciągi nieskończone. James Gregory . . . 161
*Kwadratura koła* Wallisa . . . 165
Wzory interpolacyjne Briggsa i J. Gregory'ego . . . 169
Logarytmy i szeregi nieskończone . . . 172
Rozwinięcie $\ln(1+x)$ w szereg potęgowy . . . 176
Odkrycia Gregory'ego . . . 180
Metody nieskończonościowe Keplera . . . 182
Galileusz . . . 187
Metoda niepodzielnych Cavalieriego . . . 190
Arytmetyczny wariant metody niepodzielnych Wallisa . . . 197
Analityczne sposoby całkowania Fermata . . . 200
Cykloida i sinusoida . . . 204
Metody całkowe B. Pascala . . . 206

Rektyfikacje i komplanacje . . . . . 208
Zadanie na styczne . . . . . 210
Algebraiczna metoda normalnych Kartezjusza . . . . . 211
Metoda ekstremów i stycznych Fermata . . . . . 214
Kinematyczna metoda stycznych . . . . . 217
Formalizacja metody Fermata . . . . . 219
Isaac Barrow . . . . . 221
Teoria ewolut Huygensa . . . . . 225
Związek między problemami kwadratur i stycznych . . . . . 229

Rozdział ósmy. **Rachunek różniczkowy i całkowy** *(A. P. Juszkiewicz)* . . . . . 234

W przeddzień powstania nowego rachunku . . . . . 234
Isaac Newton . . . . . 235
Newton i fizyka matematyczna . . . . . 240
Rachunek nieskończenie małych Newtona . . . . . 246
Rozwinięcia w szeregi nieskończone . . . . . 247
Fluenty, fluksje i momenty . . . . . 253
Metoda granic Newtona . . . . . 259
Niektóre zastosowania rachunku fluksji . . . . . 267
G. W. Leibniz . . . . . 269
Nauka o charakterystyce uniwersalnej . . . . . 273
Pierwsze badania nieskończonościowe Leibniza . . . . . 274
Przejście do rachunku nieskończenie małych . . . . . 277
Rozprawa Leibniza o *Nowej metodzie* . . . . . 279
Rachunek nieskończenie małych jako algorytm . . . . . 284
Szkoła Leibniza . . . . . 288
Jan Bernoulli i jego pierwsi uczniowie . . . . . 290
Dalsza rozbudowa analizy . . . . . 294
Równania różniczkowe zwyczajne . . . . . 301
Leibniz a podstawy rachunku nieskończenie małych . . . . . 305
Pierwsze podręczniki analizy matematycznej . . . . . 308
Charakterystyka stulecia . . . . . 310

**Bibliografia** . . . . . 313

**Skorowidz nazwisk** . . . . . 321

Rozdział trzeci

# POMOCNICZE ŚRODKI RACHUNKOWE

## Odkrycie logarytmów

W ciągu całego XVI w. szybko wzrastała ilość rachunków przybliżonych, przede wszystkim w astronomii. Wraz z udoskonalaniem instrumentów zwiększała się dokładność obserwacji, a z nią jednocześnie objętość tablic trygonometrycznych. Badanie ruchów planet, niezbędne dla opracowania nowego systemu Wszechświata, wymagało kolosalnych rachunków. Obliczenia Keplera, potrzebne do wyznaczenia prawdziwej orbity Marsa, kosztowały go wiele lat wytężonej pracy. Astronomom groziło realne niebezpieczeństwo utonięcia w niewykonalnych rachunkach. Trudności wystąpiły także w innych dziedzinach; do operacji finansowych i ubezpieczeniowych potrzebne były, na przykład, tablice procentów składanych dla różnych wartości stopy procentowej itd. Główną trudność stanowiło mnożenie i dzielenie liczb wielocyfrowych, zwłaszcza wielkości trygnonometrycznych.

Celem sprowadzenia mnożenia i dzielenia do łatwiejszego dodawania i odejmowania, czasem posługiwano się tablicami sinusów i cosinusów według wzorów

$$\sin a \cdot \sin b = \tfrac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)],$$

$$\cos a \cdot \cos b = \tfrac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)].$$

Ułożono tablicę kwadratów do 100000, za pomocą której mnożenie można było wykonywać według wzoru

$$ab = \tfrac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2].$$

Jednakże ani jeden, ani drugi sposób nie dawał zadowalającego rozwiązania zagadnienia. Przyniosły go tablice logarytmów.

Odkrycie logarytmów opierało się na dobrze znanych w końcu XVI w. własnościach postępów. Na związek między wyrazami postępu geometrycznego $q$, $q^2$, $q^3$, ... i postępu arytmetycznego, złożonego z ich wykładników 1, 2, 3, ... matematycy nieraz już zwracali uwagę, była o nim mowa w *Liczeniu piasku* Archi-

medesa. Drugą przesłanką było rozciągnięcie pojęcia potęgi na wykładniki ujemne i ułamkowe, co pozwoliło przenieść wymieniony wyżej związek na przypadek bardziej ogólny. Wiemy (t. I, str. 334), że Stifel zestawiał ze sobą postępy

$$\ldots, q^{-3}, q^{-2}, q^{-1}, 1, q, q^2, q^3, \ldots$$

oraz

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

I on, i liczni inni autorzy wskazywali, że mnożeniu, dzieleniu, potęgowaniu i pierwiastkowaniu w postępie geometrycznym odpowiadają w arytmetycznym — w tym samym porządku — dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie. Tu już ukryte było pojęcie logarytmu liczby jako wykładnika potęgi, do której należy podnieść daną podstawę $q$, aby otrzymać tę liczbę. Pozostawało jeszcze przenieść znane własności postępu z ogólnym wyrazem $q^n$ na dowolne wykładniki rzeczywiste. Powstałaby w ten sposób funkcja wykładnicza ciągła $q^n$, przyjmująca dowolne wartości dodatnie, a także odwrotna do niej, logarytmiczna. Tę myśl, o głębokim pryncypialnym znaczeniu, udało się jednak rozwinąć dopiero po kilkudziesięciu latach. Sam Stifel ograniczył się do przytoczenia dokonanych przez siebie obserwacji. Oto co pisał: „Tu możnaby napisać całą nową księgę o przedziwnych własnościach liczb, muszę się jednak tu zatrzymać i przejść mimo z zamkniętymi oczyma" (1).

Logarytmy wynaleźli, niezależnie od siebie, Neper i, dziesięć lat później, Bürgi. Obaj pragnęli stworzyć nowy wygodny środek dla obliczeń arytmetycznych, sprawę tę ujmowali jednak różnie. Neper wyraził funkcję logarytmiczną kinematycznie i, w istocie rzeczy, wstąpił na teren, prawie niezbadany, teorii funkcji. Bürgi pozostał na gruncie rozważania postępów dyskretnych. U obu zresztą określenia logarytmu nie były podobne do współczesnego. Zaczniemy od bardziej elementarnej teorii Bürgiego.

## Logarytmy Bürgiego

Szwajcar Jost Bürgi (1552-1632) był wysoko kwalifikowanym mechanikiem i zegarmistrzem, a matematykę studiował samodzielnie. Był nadwornym zegarmistrzem, a także mistrzem instrumentów astronomicznych najpierw w Kassel, następnie zaś od r. 1603 w Pradze, gdzie zaprzyjaźnił się z Keplerem. Nie wiadomo dokładnie kiedy Bürgi zabrał się do ułożenia swych tablic, prawdopodobnie jednak były one gotowe około r. 1610. Bürgi długo zwlekał z ich ogłoszeniem, tak że ukazały się one już po dwóch rozprawach Nepera; z powodu tej zwłoki Kepler później ganił swego przyjaciela. Książka Bürgiego nosiła tytuł *Tablice postępów arytmetycznego i geometrycznego, wraz z gruntownym pouczeniem, jak należy je rozumieć i z pożytkiem stosować we wszelkich rachunkach* (*Arithmetische und geometrische*

(1) M. Stifel, *Arithmetica integra*, Norimbergae 1544, p. 249v.

*Progress-Tabulen, sambt gründlichen Unterricht, wie solche nützlich in allerley Rechnungen zu gebrauchen und verstanden werden sol*, Prag 1620). W rzeczywistości wspomniane „pouczenie" przez długi czas pozostało nieznane; znaleziono je i ogłoszono dopiero w r. 1856.

Bürgi — o czym sam pisał — wychodził z rozważań nad odpowiedniością między mnożeniem w postępie geometrycznym a dodawaniem w postępie arytmetycznym, które znalazł wprawdzie nie u Stifela (gdyż nie znał łaciny), lecz u innych kosycznych autorów, piszących po niemiecku. Problem polegał na wyborze postępu z ilorazem dostatecznie bliskim jedności tak, by wyrazy jego następowały po sobie w odstępach dostatecznie małych dla rachunków praktycznych. Bürgi przyjął jako iloraz 1,0001 i zestawił liczby 0, 10, 20, ..., $10n$, ... postępu arytmetycznego z wyrazami geometrycznego 10000000, 100010000, 100020001, ..., $10^8 \cdot 1{,}0001^n$, ... Pierwsze liczby, wydrukowane czerwoną farbą, nazywają się *czerwonymi*, drugie wydrukowane są farbą czarną i nazywają się *czarnymi*. Liczby czerwone są logarytmami czarnych, podzielonych przez $10^8$, przy podstawie $\sqrt[10]{1{,}0001}$. Czynnik $10^8$ wprowadzony jest po to, by możliwie długo unikać ułamków. Ponieważ tablice ułożone są według liczb czerwonych, stanowią one *tablice antylogarytmów* (termin wprowadzony, w tym znaczeniu, przez Wallisa, 1693). Dlatego przy mnożeniu i dzieleniu liczb czarnych najczęściej potrzebna jest interpolacja. Liczby czarne obliczone są z dziewięcioma dokładnymi cyframi.

Liczby czerwone ułożone są w odstępach równych 10, z jednym wyjątkiem. Tablica liczb czarnych zaczyna się od $10^8$, i Bürgi kończy ją liczbą czarną $10^9$, dla której oblicza za pomocą interpolacji „pełną liczbę czerwoną" 230270,022. Liczby tej używa się przy dzieleniu $a/b$, gdy $a < b$, podobnie jak w logarytmach dziesiętnych dodaje się całkowitą cechę, aby uniknąć ujemnej mantysy. W tym przypadku bowiem zamiast $a/b$ Bürgi znajduje $a \cdot 10^9/b$; dodaje liczby czerwone odpowiadające $a$ i $10^9$, odejmuje od ich sumy liczbę czerwoną odpowiadającą $b$, i w rezultacie otrzymuje czarną liczbę z dziewięcioma znakami dziesiętnymi, dającą ułamek $a/b$. Jeśli $a > b$, Bürgi odejmuje od czerwonej liczby dla $a$ czerwoną liczbę dla $b$ i znajduje czarną liczbę odpowiadającą rezultatowi; otrzymana liczba daje osiem znaków dziesiętnych ułamka $a/b$.

Tablice Bürgiego mało rozpowszechniły się. Nie mogły konkurować z tablicami Nepera, bardziej wygodnymi i z tego powodu już szeroko znanymi w r. 1620.

## Logarytmy Nepera

Pierwszym wynalazcą logarytmów był szkocki baron John Neper (1550-1617). Po studiach w Edynburgu i podróżach po Niemczech, Francji i Hiszpanii, Neper w wieku 21 lat osiedlił się na stałe w rodzinnym majątku w pobliżu Edynburga. Tu, w wiejskiej ciszy, zajmował się głównie teologią i matematyką, którą studiował w dziełach Euklidesa, Archimedesa, Regiomontana, Kopernika i innych uczonych,

wśród nich może także Stifela. W roku 1593 Neper, zawzięty przeciwnik katolicyzmu, ogłosił napisane w stylu traktatu geometrycznego dzieło przeciw kościołowi rzymskiemu, wykazując w nim, że papież jest antychrystem. Książeczka ta zyskała autorowi w XVII w. znacznie większy rozgłos, niż jego prace matematyczne. Neper entuzjazmował się też astrologią.

Do odkrycia logarytmów Neper doszedł w r. 1594 lub wcześniej, lecz dopiero 20 lat później wydał swój *Opis przedziwnej tablicy logarytmów* (*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, Edinburgi 1614), zawierający określenie logarytmów neperowskich, ich własności i tablice logarytmów sinusów i cosinusów od 0° do 90°, w odstępach co 1′, oraz różnice tych logarytmów, dające logarytmy tangensów. Dowody teoretyczne i objaśnienia o sposobie obliczenia tablicy przedstawił w innej pracy, napisanej prawdopodobnie przed *Opisem*, lecz wydanej pośmiertnie, mianowicie w *Konstrukcji przedziwnej tablicy logarytmów* (*Mirifici logarithmorum canonis constructio*, Edinburgi 1619). Zauważmy, że w obu dziełach Neper rozważa również pewne zagadnienia z trygonometrii. Szczególnie znane są, wygodne dla logarytmowania, „analogie", tzn. proporcje Nepera, stosowane przy rozwiązywaniu trójkątów sferycznych, gdy dane są dwa boki i kąt między nimi, a także gdy dane są dwa kąty i bok do nich przyległy.

Przeciwnie niż Bürgi, który zestawiał ze sobą dwa postępy dyskretne, Neper od samego początku wprowadził pojęcie logarytmu dla wszystkich wartości wielkości trygonometrycznych zmieniających się w sposób ciągły — sinusa i cosinusa. W ówczesnym stanie matematyki, gdy nie istniał jeszcze aparat analityczny rachunku nieskończenie małych, naturalną i jedyną drogą do celu było kinematyczne określenie logarytmu. Może nie były tu bez wpływu także tradycje wywodzące się z oksfordzkiej szkoły XIV w. Przytoczymy podstawową definicję z *Opisu*: „Def. 1. Mówimy, że linia wzrasta jednostajnie, gdy opisujący ją punkt przebywa w równych momentach równe odcinki. — Def. 2. Mówimy, że linia skraca się proporcjonalnie, gdy przebiegający ją punkt w równych momentach odcina odcinki, zachowujące stale jeden i ten sam stosunek do tych linii, od których są one odcięte. — Def. 3. Mówimy, że ilości niewymierne, czyli niewyrażalne liczbą, określone są z największym przybliżeniem, gdy określone są dużymi liczbami, różniącymi się od prawdziwych wartości niewymiernych ilości o mniej niż jedność. — Def. 4. Synchronicznymi ruchami nazywamy te, które odbywają się jednocześnie i w ciągu jednego i tego samego czasu. — Def. 5. i postulat. Ponieważ istnieją ruchy zarówno bardziej powolne, jak bardziej szybkie, niż jakikolwiek ruch dany, stąd wynika koniecznie, że istnieje ruch równie szybki jak jakikolwiek dany (który określamy jako ruch ani powolniejszy, ani szybszy, niż dany). — Def. 6. Logarytmem jakiegokolwiek sinusa nazywamy wreszcie linię, określającą z największym przybliżeniem linię wzrastającą jednostajnie, podczas gdy linia sinusa całkowitego maleje proporcjonalnie do wielkości danego sinusa, przy czym oba ruchy są synchroniczne i równoszybkie na początku" (1).

(1) Cyt. według komentarza I. J. Timczenki do książki: Ф. Кэджори, *История элементарной математики*, Перевод И. Ю. Тимченко, Одесса 1917, стр. 439-440.

W geometrycznym wysłowieniu wypowiedzianych jest wiele godnych uwagi myśli, których szczegółowa analiza zaprowadziłaby nas zbyt daleko. Podkreślimy tylko swoiste sformułowanie pojęcia ciągłości w trzeciej definicji i zajmiemy się podstawową, szóstą definicją logarytmu.

Jeśli przedstawimy sinus całkowity, tzn. promień koła, u Nepera równy $10^7$, jako odcinek $AB$, a linię sinusa — jako odcinek $YB = y$ (rys. 5), to logarytmem $y$

John Neper
(z portretu znajdującego się w Edynburgu)

(oznaczymy go $Ly$) będzie odcinek $OX = x$, opisany przez punkt $X$, rozpoczynający ruch z punktu $O$ ze stałą prędkością $v_0$, w tym samym czasie, w którym punkt $Y$, jednocześnie wychodzący z $A$ z tą samą prędkością początkową $v_0$, przebywa od-

cinek $AY$ z prędkością proporcjonalną do odległości, która go dzieli od drugiego końca $B$, tzn. proporcjonalną do $YB$. W symbolice rachunku różniczkowego

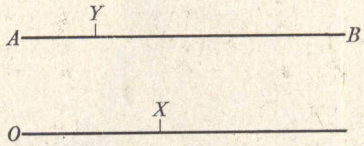
$$\frac{dx}{dt} = v_0\,, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{-v_0 y}{10^7}\,,$$

tzn.

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{10^7}\,,$$

i, uwzględniając, że $y = 10^7$, gdy $x = 0$,

$$x = Ly = -10^7 \ln \frac{y}{10^7} = -10^7 \ln y + 10^7 \ln 10^7\,.$$




Rys. 5

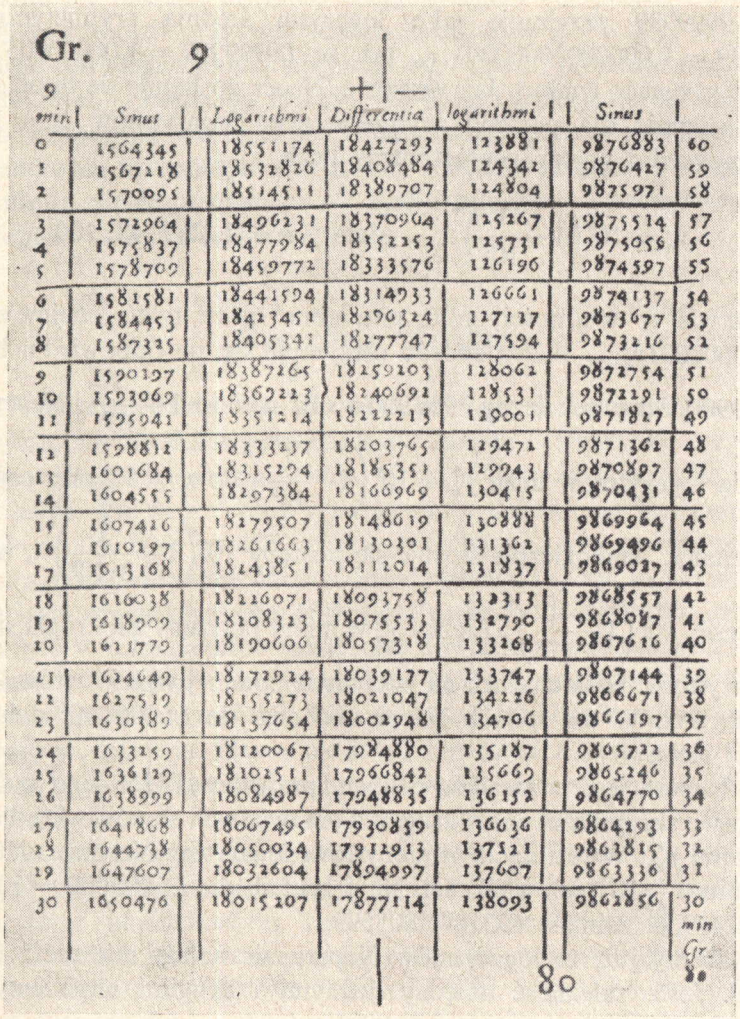
Jak widać, logarytm neperowski liczby $y$ nie jest, jak czasem czyta się w podręcznikach analizy, logarytmem naturalnym tej liczby: $Ly$ wyraża się przez $\ln y$ liniowo. Z tego powodu liczne własności logarytmów Nepera nieco różnią się od własności logarytmów w naszym znaczeniu tego słowa. Zasadnicze własności są oczywiście wspólne: jeśli cztery liczby tworzą proporcję geometryczną $y_1 : y_2 = y_3 : y_4$, to ich logarytmy tworzą proporcję arytmetyczną $Ly_1 - Ly_2 = Ly_3 - Ly_4$, tzn. postępowi geometrycznemu liczb odpowiada postęp arytmetyczny logarytmów. Ponieważ jednak $L1 = 10^7 \cdot \ln 10^7$, tzn. $L1$ nie równa się zeru, prawidła działań komplikują się: na przykład

$$L(ab) = La + Lb - L1\,, \quad L\frac{a}{b} = La - Lb + L1$$

itd. W przykładach Nepera, co prawda, $L1$ znika, ale tylko dlatego, że w nich oblicza się czwartą proporcjonalną i średnią proporcjonalną, na przykład

$$L\frac{ab}{c} = L(ab) - Lc + L1 = La + Lb - Lc\,.$$

Zerem jest logarytm neperowski liczby $10^7$, tzn. sinusa całkowitego, czyli promienia. Do tego właśnie zmierzał Neper, mając na oku przede wszystkim obliczenia trygonometryczne. Ponieważ wielkości trygonometryczne traktowano nie w stosunku do promienia, lecz jako odcinki wyrażone w tych samych jednostkach co sinus całkowity, ten ostatni wchodził do wzorów i przez niego często trzeba było mnożyć i dzielić. Fakt, że logarytm sinusa całkowitego był równy zeru, dawał w takich warunkach określone korzyści. W miarę jak maleją wartości naturalne sinusa, logarytm neperowski wzrasta, a gdy sinus jest równy zeru, staje się on nie-



Gr. 9

| 9 min | Sinus | Logarithmi | Differentia | logarithmi | Sinus | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1564345 | 18551174 | 18427293 | 123881 | 9876883 | 60 |
| 1 | 1567218 | 18532826 | 18408484 | 124342 | 9876427 | 59 |
| 2 | 1570095 | 18514511 | 18389707 | 124804 | 9875971 | 58 |
| 3 | 1572964 | 18496231 | 18370964 | 125267 | 9875514 | 57 |
| 4 | 1575837 | 18477984 | 18352253 | 125731 | 9875056 | 56 |
| 5 | 1578709 | 18459772 | 18333576 | 126196 | 9874597 | 55 |
| 6 | 1581581 | 18441594 | 18314933 | 126661 | 9874137 | 54 |
| 7 | 1584453 | 18423451 | 18296324 | 127127 | 9873677 | 53 |
| 8 | 1587325 | 18405343 | 18277747 | 127594 | 9873216 | 52 |
| 9 | 1590197 | 18387265 | 18259203 | 128062 | 9872754 | 51 |
| 10 | 1593069 | 18369223 | 18240692 | 128531 | 9872291 | 50 |
| 11 | 1595941 | 18351214 | 18222213 | 129001 | 9871827 | 49 |
| 12 | 1598812 | 18333237 | 18203765 | 129472 | 9871362 | 48 |
| 13 | 1601684 | 18315294 | 18185351 | 129943 | 9870897 | 47 |
| 14 | 1604555 | 18297384 | 18166969 | 130415 | 9870431 | 46 |
| 15 | 1607426 | 18279507 | 18148619 | 130888 | 9869964 | 45 |
| 16 | 1610297 | 18261663 | 18130301 | 131362 | 9869496 | 44 |
| 17 | 1613168 | 18243851 | 18112014 | 131837 | 9869027 | 43 |
| 18 | 1616038 | 18226071 | 18093758 | 132313 | 9868557 | 42 |
| 19 | 1618909 | 18208323 | 18075533 | 132790 | 9868087 | 41 |
| 20 | 1621779 | 18190606 | 18057318 | 133268 | 9867616 | 40 |
| 21 | 1624649 | 18172924 | 18039177 | 133747 | 9867144 | 39 |
| 22 | 1627519 | 18155273 | 18021047 | 134226 | 9866671 | 38 |
| 23 | 1630389 | 18137654 | 18002948 | 134706 | 9866197 | 37 |
| 24 | 1633259 | 18120067 | 17984880 | 135187 | 9865722 | 36 |
| 25 | 1636129 | 18102511 | 17966842 | 135669 | 9865246 | 35 |
| 26 | 1638999 | 18084987 | 17948835 | 136152 | 9864770 | 34 |
| 27 | 1641868 | 18067495 | 17930859 | 136636 | 9864293 | 33 |
| 28 | 1644738 | 18050034 | 17912913 | 137121 | 9863815 | 32 |
| 29 | 1647607 | 18032604 | 17894997 | 137607 | 9863336 | 31 |
| 30 | 1650476 | 18015207 | 17877114 | 138093 | 9862856 | 30 |

min Gr. 80

Stronica z *Opisu przedziwnej tablicy logarytmów* Nepera (Edynburg 1614)

skończonością. W tablicy Nepera, w wierszu, w którym w rubryce sinusa figuruje 0, rubryka logarytmu sinusa podaje słowo *Infinitum* — *nieskończoność.*

Rzecz jasna, że Neper nie zapisywał i nie całkował przytoczonego wyżej równania różniczkowego, wyrażającego kinematyczną definicję logarytmu. W istocie jednak jego sposób ułożenia tablic jest równoważny przybliżonemu rozwiązaniu numerycznemu równania różniczkowego. Początkowo wyznacza się bardzo mały odcinek, przebyty przez punkt $X$, gdy punkt $Y$ przemieszcza się z położenia początkowego $A$ na odległość 1, tzn. oblicza się $L9999999$. Opierając się na pojęciu prędkości chwilowej i porównując prędkości punktów $X$ i $Y$, Neper wykazuje, że

$$10^7 - y < Ly < \frac{10^7}{y}(10^7 - y)$$

i dla $y = 9999999$ przyjmuje jako logarytm średnią arytmetyczną liczb 1 i $10^7/9999999 = 1{,}00000010000001\ldots$, tak że $L9999999 = 1{,}00000005$ (z dokładnością do czternastego znaku). Jak wszędzie, Neper posługuje się tu ułamkami dziesiętnymi. Następnie dla postępu arytmetycznego logarytmów $x_n = 1{,}00000005n$ znajduje odpowiedni postęp geometryczny liczb

$$y_n = 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^n, \quad \text{gdzie} \quad n = 1, 2, 3, \ldots, 100.$$

Nie przedstawia to trudności, gdyż potrzebne są tu tylko odejmowania: $y_k = y_{k-1} - 0{,}0000001y_{k-1}$. W ten sposób otrzymuje się, po odpowiednich zaokrągleniach, $L9999900$. Stosunek liczby 9999900 do $10^7$ wynosi $1-\frac{1}{10^5}$, i Neper przechodzi do obliczenia logarytmów liczb $y'_n = 10^7\left(1-\frac{1}{10^5}\right)^n$ do $n = 50$, przy czym logarytm $y'_1$ jest już znany. Analogicznie stosuje się postępy $10^7\left(1-\frac{1}{2\cdot 10^3}\right)^n$ i, w szczególnie dużym zakresie, $10^7\left(1-\frac{1}{10^2}\right)^n$. Liczby $y_n$ w miarę potrzeby zaokrągla się i, szacując różnice logarytmów bliskich liczb na podstawie podanej wyżej nierówności, oblicza się ich logarytmy. W ten sposób Neper dochodzi do $L5000000$; dalsze rachunki już są mniej ciekawe.

Metoda Nepera jest w zasadzie całkiem prawidłowa. Do jego rachunków, na ogół wyjątkowo skrupulatnych, w drugim z omawianych etapów wkradła się omyłka przy obliczaniu $y'_{50}$. W rezultacie ośmiocyfrowe logarytmy Nepera należy zwiększyć w przybliżeniu o $\frac{3}{8}\cdot 10^{-6}$ ich wielkości. Na przykład, dla $L5000000 = 10^7\cdot\ln 2$ Neper znalazł 6931469,22 zamiast 6931471,805599.

Podkreślaliśmy już, że logarytmów Nepera nie należy mieszać z logarytmami naturalnymi. Jeśli zależność między jednymi i drugimi napiszemy w postaci $\frac{Ly}{10^7} = \log_{1/e}\frac{y}{10^7}$, to można powiedzieć, że logarytmom neperowskim odpowiadają logarytmy o podstawie $1/e$, ściślej, wobec wspomnianej niedokładności, o podstawie $1/e'$, bardzo zbliżonej do $1/e$, $e'^{1-\frac{3}{8}\cdot 10^{-6}} \approx e$. W systemach zarówno Nepera, jak Bürgiego, nie było jednak, ściśle biorąc, podstawy logarytmów, gdyż logarytm jedności jest w nich różny od zera. Ale i później, kiedy już dawno weszły w użycie logarytmy dziesiętne i naturalne, bynajmniej nie od razu logarytm zdefiniowano jako wykładnik potęgi danej podstawy. Tak rozumieli logarytmy Wallis (1685), Jan Bernoulli (1694) i inni, i pojęcie takie, jak zobaczymy, nie było obce samemu Neperowi. W podręcznikach pojawia się ono po raz pierwszy prawdopodobnie u W. Gardinera (*Tables of Logarithms*, London 1742). Sam Gardiner zresztą korzystał przy tym z pism wykładowcy matematyki W. Jones'a (1675-1749), który pierwszy oznaczał literą $\pi$ stosunek okręgu do średnicy (1706). Do szerokiego roz-

powszechnienia się obecnie przyjętej definicji logarytmu przyczynił się najwięcej Euler, który wprowadził przy tym termin „podstawa".

Słowo *logarytm (logarithmus)* pochodzi od Nepera, powstało ono z połączenia greckich słów *λόγος* — *stosunek* i *liczba* — *ἀριθμός*, i znaczy *liczba stosunku (λόγου ἀριθμός)*, co przypomina stosunki podwójne, potrójne, półtorakrotne i inne, całkowite lub ułamkowe, matematyki starożytnej i średniowiecznej. Początkowo Neper używał terminu: *numeri artificiales* — *liczby sztuczne* — w przeciwieństwie do *numeri naturales* — *liczby naturalne*.

## Logarytmy dziesiętne

Tablice Nepera, przeznaczone do obliczeń trygonometrycznych, były niewygodne w użyciu, gdy chodziło o działania na danych liczbach. Po pierwsze, tablice ułożone były według wartości sinusów od 0° do 90° i cosinusów, a nie według ciągu liczb naturalnych. Po wtóre, przy wykonywaniu działań na liczbach za pomocą tablic Nepera trzeba było jeszcze operować liczbą $L1$. Aby usunąć te niewygody, Neper zaproponował ułożenie tablicy logarytmów tak, by logarytmem jedności było zero, a logarytmem dziesięciu $10^{10}$, albo, co na jedno wychodzi, po prostu jedność. Uczynił to w toku rozmów jakie miał z profesorem matematyki w Gresham College w Londynie, Henry Briggsem (1561-1631), który odwiedził go w r. 1615 i który sam zastanawiał się nad tym, jak udoskonalić tablice logarytmów. Z powodu pogarszającego się zdrowia, Neper nie mógł sam zająć się realizacją swego planu, lecz wskazał pomysł dwóch metod rachunkowych Briggsowi, który je dalej rozwinął.

Briggs ogłosił pierwsze rezultaty swych mozolnych obliczeń — *Pierwszy tysiąc logarytmów* (*Logarithmorum chilias prima*, Londini 1617) w roku śmierci Nepera. Podał tu logarytmy dziesiętne liczb od 1 do 1000 z czternastoma znakami. Później, już jako profesor w Oksfordzie, wydał *Arytmetykę logarytmiczną* (*Arithmetica logarithmica*, Londini 1624), zawierającą czternastocyfrowe logarytmy liczb od 1 do 20000 i od 90000 do 100000. Pozostałą lukę wypełnił holenderski księgarz i miłośnik matematyki Adriaen Vlacq (1600-1667), który ogłosił jako drugie wydanie dzieła Briggsa i pod tymże tytułem (Gouda 1628) tablice dziesięciocyfrowe od 1 do 100000 wraz z takimiż logarytmami wszystkich sześciu linii trygonometrycznych w odstępach 1′.

Nieco wcześniej siedmiocyfrowe tablice dziesiętne sinusów i tangensów obliczył kolega Briggsa z Gresham College, wychowanek uniwersytetu oksfordzkiego Edmund Gunter (1581-1626), który ogłosił je w *Kanonie trójkątów* (*Canon triangulorum*, Londini 1620). Z nazwiskiem Guntera, który zresztą wprowadził słowa cosinus i cotangens, spotkamy się jeszcze w związku z wynalezieniem suwaka logarytmicznego.

Tablice Vlacqa stały się podstawą wszystkich następnych, które wniosły do nich sporo zmian strukturalnych i poprawek; u Vlacqa były jeszcze 173 omyłki w pierwszych siedmiu znakach, a wszystkich ponad 600. Nie łatwo było usunąć te omyłki.

Jeszcze w znanych tablicach Słoweńca Georga Vegi (1754-1802), wydrukowanych po raz pierwszy w Wiedniu w r. 1783, i wielokrotnie wydawanych aż do naszych czasów, było pięć omyłek. Pierwsze bezbłędne tablice Vegi, opracowane przez niemieckiego matematyka C. Bremikera (1804-1877), ukazały się w Berlinie w r. 1857.

Nie możemy tu wchodzić w szczegóły dwóch metod rachunkowych stosowanych przez Briggsa. Obie, jak już mówiliśmy, pochodzą od Nepera. Jedna z nich opiera się na tym, że *cecha* (*charakterystyka*, termin Briggsa), tzn. część całkowita logarytmu liczby całkowitej, jest o 1 mniejsza od liczby cyfr danej liczby. Z drugiej strony, cecha logarytmu dziesiętnego $a^{10^{14}}$, gdzie $1 < a < 10$, daje czternaście pierwszych znaków logarytmu $a$. Aby znaleźć te znaki, wystarczy więc znać liczbę cyfr liczby $a^{10^{14}}$, a to jest możliwe bez wyznaczania samych cyfr, co byłoby nie do pomyślenia. Rzecz w tym, że liczba cyfr iloczynu dwóch czynników jest równa sumie liczb ich cyfr albo o 1 mniejsza, a stwierdzić można, który z tych przypadków zachodzi, na podstawie pierwszych cyfr czynników. W ten sposób Briggs obliczył

$$\log 2 = 0{,}30102999566398$$

i kilka innych.

Większość logarytmów dziesiętnych liczb pierwszych Briggs wyznaczył jednak drugą metodą — obliczaniem pierwiastków kwadratowych. Ważną rolę w jego rachunkach odgrywał stosunek graniczny, który zapisujemy w postaci współczesnej

$$\ln a = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)\,.$$

Ponieważ

$$\log a = \frac{\ln a}{\ln 10}$$

mamy

$$\log a \approx \frac{n(\sqrt[n]{a}-1)}{m(\sqrt[m]{10}-1)}$$

dla bardzo dużych $m$ i $n$. Briggs istotnie stosował taką procedurę, przy czym brał $m$ i $n$ w postaci potęg liczby 2. O godnych uwagi osiągnięciach Briggsa dotyczących interpolacji opowiemy dalej (zob. str. 170).

Jak widać, odkrycie Nepera już w pierwszych latach zyskało wyjątkowo szeroki rozgłos. Zestawianiem tablic logarytmicznych i udoskonalaniem ich zajmowało się bardzo wielu matematyków oprócz wymienionych, między innymi Kepler (Marburg, 1624-1625), który stosował logarytmy do budowy nowych tablic ruchów planet (1627). W dodatku do drugiego wydania *Opisu* Nepera (1618) obliczonych było także kilka logarytmów naturalnych; można w nim doszukiwać się wstępnych kroków do wprowadzenia granicy $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, gdy $n\to\infty$. Autorem tego dodatku był może W. Oughtred. Wkrótce potem londyński nauczyciel matematyki John Speidell

wydał tablice logarytmów naturalnych liczb od 1 do 1000 i sinusów pod tytułem *Nowe logarytmy*... (*New Logarithmes*..., London 1619). Termin *logarytmy naturalne* wprowadzili P. Mengoli (1659) i, za nim, N. Mercator (1668).

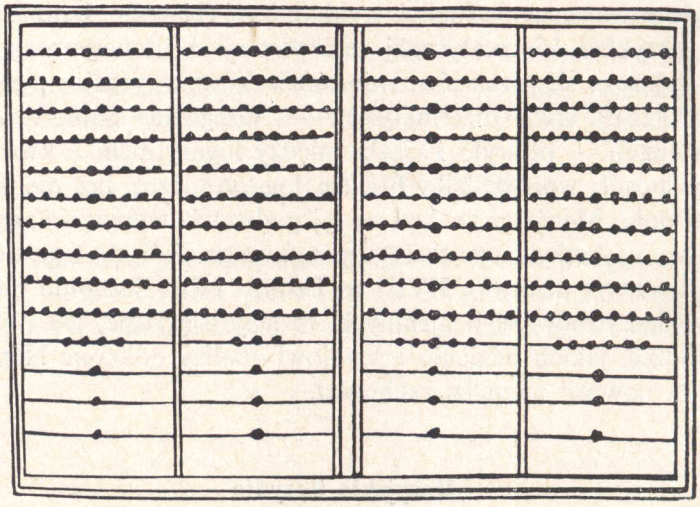
Praktyczne znaczenie wszystkich tych prac było bardzo duże. Gigantyczny trud autorów tablic i wirtuozowska zręczność rachunkowa zasługują na głęboki szacunek. Ale odkrycie logarytmów miało także ogromne znaczenie teoretyczne. Już w omawianej tu epoce dało początek badaniom, o których nie mogli nawet marzyć pierwsi ich wynalazcy, których celem było tylko ułatwić i przyśpieszyć rachunki arytmetyczne i trygonometryczne na dużych liczbach. Przypomnimy jeszcze raz, że Neper odkrył drogę do dziedziny nowych funkcji przestępnych — drogę, na której etapem następnym było wprowadzenie funkcji wykładniczej (Newton, Leibniz), i że wskazał on pierwszy przykład kinematycznej interpretacji i numerycznego rozwiązania zadania, wyrażającego się przez równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu. W latach 1630-1670 kilku matematyków — Gregorius Saint-Vincent, Fermat, Brouncker, Mengoli — odkryło związki między logarytmem a kwadraturą hiperboli, i w ten sposób wprowadziło funkcję logarytmiczną już nie kinematycznie, lecz w postaci pola. Mercator znalazł na tej podstawie wyrażenie analityczne logarytmu w postaci nieskończonego szeregu potęgowego. Jeśli do tego dodamy choćby ten fakt, że na samym początku XVIII w. Leibniz i Jan Bernoulli postawili zagadnienie natury logarytmów liczb ujemnych, to staje się jasne, jak potężne i różnorodne były bodźce, jakich udzieliło rozwojowi analizy odkrycie Nepera, zrodzone z poszukiwania nowych narzędzi rachunku.

## Rosyjskie liczydła

Do dawno znanego *abaku* (zob. t. I. str. 279) w średniowieczu dołączył się rachunek na liniach za pomocą jednakowych ruchomych żetonów, którego opis podają liczne podręczniki arytmetyki, m. i. także w rosyjskich rękopisach XVII w. Na stole czy na desce, przed rachmistrzem, kilka linii poziomych oznaczało jedności, dziesiątki, setki itd., licząc kolejno od siebie, a przekreślone były liniami prostopadłymi. W kolumnach od lewej oznaczano żetonami liczby, na których wykonywane było działanie. Na każdą linię kładziono do czterech żetonów, a żeton między liniami oznaczał pięć jedności tego rzędu, któremu odpowiadała prosta położona bliżej rachmistrza. Rezultaty pośrednie i ostateczny kładziono w wolnych prawych kolumnach. Czasem niektóre oddziały służyły do działań na ułamkach 1/2, 1/4, 1/8 lub też do rachunków pieniężnych itd. Rachunek na liniach był bardzo rozpowszechniony w gospodarstwie i w życiu codziennym. Produkcja żetonów należała do specjalnej gałęzi przemysłu, która osiągała niekiedy wysoki stopień rozwoju, jak na przykład w Norymberdze w XVI-XVII w. Ten sposób liczenia Leibniz przedkładał nad rachunek piśmienny, a z użycia zaczął wychodzić w XVIII w.

W niektórych krajach istniały różne rodzaje liczydeł, podobnych do rosyjskich. Opowiadaliśmy już o chińskim *suan-panie* i o japońskim *sorobanie* (zob. t. I, str. 175),

w których, podobnie jak w rachunku na liniach, zachowały się jeszcze ślady starożytnego rachunku piątkowego. W Rosji rachunek na liniach, zwany *rachunkiem kostkami*, cieszył się mniejszą popularnością niż *rachunek na desce* — który stanowił główny środek rachunkowy urzędników państwowych i kupców. Rachunek na desce był przystosowany do szczególnych wymagań operacji podatkowych i miernictwa, w których podstawowe jednostki pola dzieliły się na drobniejsze miary w stosunkach 1:2:4:8:... oraz 1:3:6:12:... Przez długi czas podatek pobierano w zależności od ilości i gatunku ziemi, którą przeliczano według określonych współczynników na podstawowe jednostki rachunkowe — *sochy*. W konstrukcji liczydeł



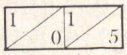
„Rachunek na desce" z czterema polami rachunkowymi (rysunek z rękopisu Nr 1664 Zbioru Pogodyńskiego Państwowej Biblioteki Publicznej w Leningradzie, wykaz z r. 1691)

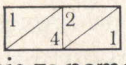
uwzględnione były także szczególne własności waluty. W wieku XVI w Rosji wprowadzony został jednolity system monetarny, w którym oprócz 1 rubla = 100 kopiejkom w obiegu były 1 dziesięciokopiejkówka, 1 ałtyn = 3 kopiejkom, 1 dienga = = 1/2 kopiejki i 1 połuszka = 1/2 diengi. Stosunki 1:3 i 1:2 przetrwały w rosyjskiej metrologii aż do Rewolucji Październikowej. Na przykład, 1 pud = 40 funtów, a 1 funt = 32 łuty = 96 zołotników, 1 sążeń = 3 arszynom = 48 werszków.

Dawne rosyjskie liczydła składały się z czterech pól, parami połączonych w dwóch skrzynkach. W każdym polu przeciągnięte były równolegle sznury lub druty. Dla operacji na liczbach całkowitych nanizano na nich po dziewięć albo dziesięć kostek, na pozostałych sznurach było po trzy, cztery, sześć i wreszcie po jednej kostce. Specjalne podręczniki szczegółowo objaśniały na przykładach, jak należy posługiwać się liczydłem na desce. W roku 1646 podatek gruntowy zastąpiono podwornem, a następnie (1722) także pogłównem. Liczydła zmieniły się i przyjęły tę postać, którą mają obecnie. Pozostało jedno pole i usunięto druty dla operacji na ułamkach dwójkowych i dwójkowo-trójkowych. Zachowano tylko dwa druty

po cztery kostki na każdym dla rachunku pieniężnego w diengach i półgroszach (monety po 1/2 i 1/4 kopiejki) i w półrublówkach i ćwierćrublówkach (monety po 50 i 25 kopiejek). Rosyjskie liczydła w dalszym ciągu używane są obecnie; są tanie i w użyciu powodują znacznie mniej hałasu, niż szybsze arytmometry i komputery.

## Pałeczki Nepera

Poszukiwaniem nowych przyrządów rachunkowych zajmowało się wielu matematyków XVII w. Neper w *Dwóch księgach o rabdologii, czyli o liczeniu za pomocą pałeczek* (*Rabdologiae seu numerationis per virgulas libri duo*, Edinburgi 1617) (1) opisał działania na przyrządzie rachunkowym złożonym z 10 lub więcej pałeczek prostopadłościennych, na ścianach których wypisane były iloczyny liczb od 1 do 9 przez liczby od 1 do 9, prócz tego z jednej pałeczki dla mnożenia przez zero. Każdej mnożnej odpowiada własna pałeczka; iloczyny odczytuje się z góry na dół w kwadracikach podzielonych przekątnymi. Aby pomnożyć, na przykład 23 przez 57, należy przyłożyć do siebie pałeczki oznaczone u góry cyframi 2 i 3 i w wierszu, w którym mnożnikowi 5 odpowiadają iloczyny 2·5 i 3·5 

, znaleźć za pomocą dodawania iloczyn 23·50, tzn. 1150, a w wierszu, w którym mnożnikowi 7 odpowiadają iloczyny 2·7 i 3·7 

, znaleźć iloczyn 23·7 = 161. Potem dodaje się 1150 + 161 = 1311. Dzielenie za pomocą tego przyrządu było mniej wygodne.

## Suwak logarytmiczny

Pałeczki Nepera przez jakiś czas stosowano z powodzeniem w krajach Europy zachodniej, lecz lepsza przyszłość sądzona była innemu wynalazkowi, który łączył w sobie zawartą w tym przyrządzie ideę automatycznego i, w istocie rzeczy, graficznego wyznaczania iloczynu danych czynników, z własnościami odkrytych przez Nepera logarytmów. Mowa o suwaku logarytmicznym. Decydujący krok uczynił E. Gunter, który wymyślił samą skalę logarytmiczną; wynalazek ten opisał londyński adwokat i miłośnik matematyki Edmund Wingate (1593-1656) w pracy wydrukowanej w Paryżu w r. 1624. Aby jednak móc posługiwać się skalą Guntera, trzeba było mieć cyrkiel do odkładania odcinków. W. Oughtred udoskonalił jeszcze prymitywny przyrząd, zaopatrując go w dwie jednakowe skale, z których jedna przesuwa się wzdłuż drugiej (*Kołowy suwak rachunkowy i instrument poziomy — The Circles of Proportion and the Horizontal Instrument*, London 1632). Kiedy po 30 latach Set Partridge (1662) skonstruował przyrząd, w którym jedna skala ślizgała się w wyżłobieniu drugiej, suwak logarytmiczny, zwany *podwójną skalą stosunków*, przyjął w zasadzie wygląd obecny.

---

(1) *Rabdologia* — nauka o pałeczkach: greckie ῥάβδος — *pałeczka*.

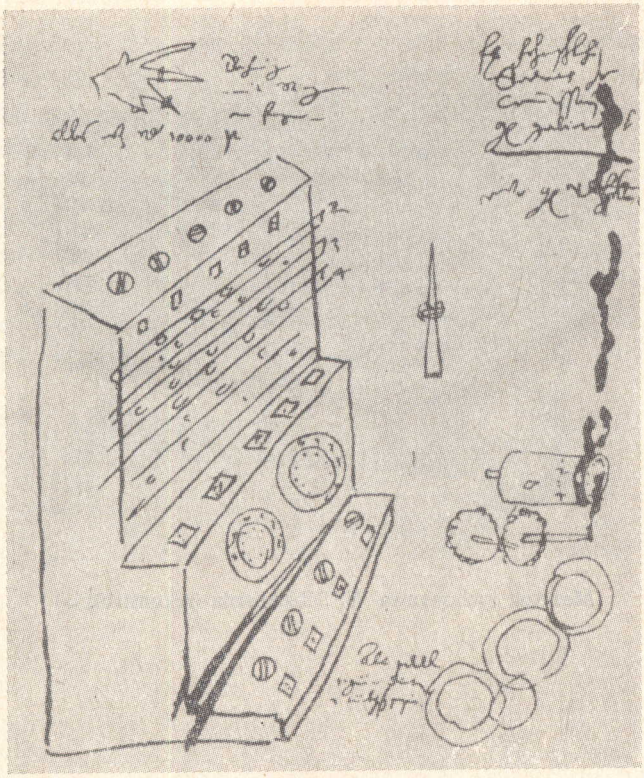
## Maszyny rachunkowe

Rozwój techniki maszynowej w naturalny sposób nasuwał myśl skonstruowania dla celów rachunkowych również i przyrządów mechanicznych. Pałeczki Nepera, upraszczające mnożenie i dzielenie, nie ułatwiały dodawania i odejmowania, podobnie jak tablice logarytmiczne. Pierwszą próbę zmechanizowania wszystkich czterech podstawowych operacji arytmetycznych i sprowadzenia pracy rachmistrza do minimum podjął profesor uniwersytetu w Tybindze, przyjaciel Keplera, Wilhelm Schickhard (1592-1635) — astronom i kartograf, orientalista i matematyk, przedwcześnie zmarły w czasie jednej z epidemii dżumy, które często nawiedzały wtedy Europę. O swym wynalazku Schickhard pisał do Keplera 20 września 1623 r., a w liście z 25 lutego 1624 r. podał jego opis i szkic rysunkowy.

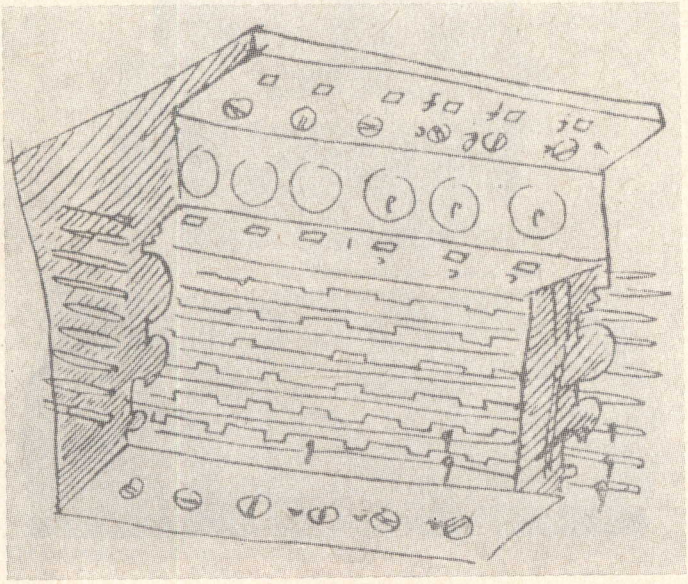
Maszyna Schickharda miała już wiele cech wspólnych z przyszłymi arytmometrami. Stanowiła kombinację cylindrów z zębatymi kołami cyfrowymi, których obrót w jedną lub drugą stronę wykonywał operacje dodawania i odejmowania. Posiadała ona także mechanizm do przenoszenia dziesiątków, sprawiający, że przy pełnym obrocie jednego koła o 10 podziałek następne obracało się tylko o jedną podziałkę; w tym celu Schickhard posługiwał się takimi samymi kołami, w których usuniętych było 9 zębów z 10. Do mnożenia i dzielenia służyły specjalne cylindry, analogiczne do pałeczek Nepera i umieszczone w osobnej części maszyny. Cyfry można było odczytywać w okienkach na zewnętrznej obudowie. Maszynę uruchamiano podobnie jak obecny automatyczny aparat telefoniczny. W drugim z wymienionych listów Schickhard donosi, że kazał wykonać dla Keplera jej egzemplarz, który niestety zaginął w czasie pożaru. Ani jeden egzemplarz tego instrumentu, który autor nazywał *maszyną arytmetyczną*, nie zachował się, lecz niedawno zrekonstruowano ją na podstawie opisów, i obecnie jej modele oglądać można w ratuszu w Tybindze i w muzeum miasta Weil, rodzinnego miasta Keplera.

Drugą maszynę sumującą zbudował, całkiem niezależnie od Schickharda, młody Pascal. Skłoniła go do tego chęć uproszczenia dużych i długich obliczeń finansowych, jakie wykonywać miał, na polecenie władz, jego ojciec, który do pomocy wziął syna. W roku 1642 B. Pascal opracował konstrukcję maszyny arytmetycznej, której zasady były te same, co u Schickharda. W królewskim patencie z r. 1645 wyszczególniona była, jako główna część wynalazku, mechanizacja przenoszenia dziesiątków. Wynalazkowi swemu Pascal przypisywał wielkie znaczenie, podkreślając niezawodność maszyny, prostotę jej obsługi, uzyskaną dzięki automatycznemu działaniu, oraz inne zalety. Przezwyciężając duże trudności techniczne, sporządził za pomocą doświadczonych majstrów kilkadziesiąt dobrze działających egzemplarzy maszyny, które można było kupić w mieszkaniu jego znajomego profesora Kolegium Francuskiego, Robervala. Kilka egzemplarzy maszyny przechowanych jest w Paryżu i w innych miejscowościach.

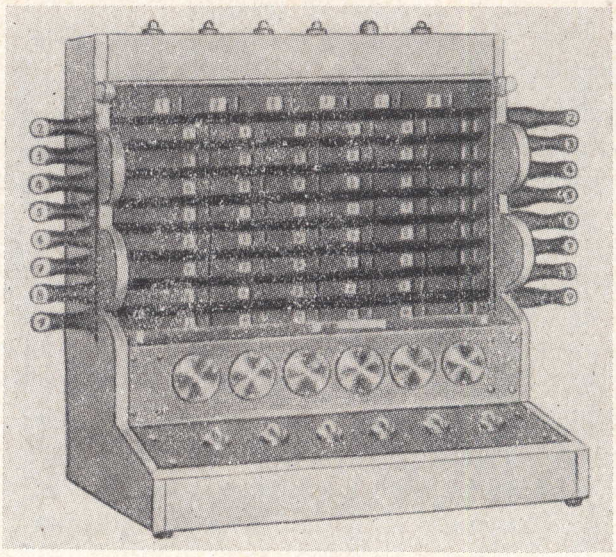
Wreszcie w r. 1671, nie wiedząc nic o całkowicie zapomnianym już wtedy wynalazku Schickharda, nową konstrukcję maszyny rachunkowej przedstawił Leibniz, wnosząc potem do niej uzupełniające ulepszenia, i podał jej opis w publikacjach



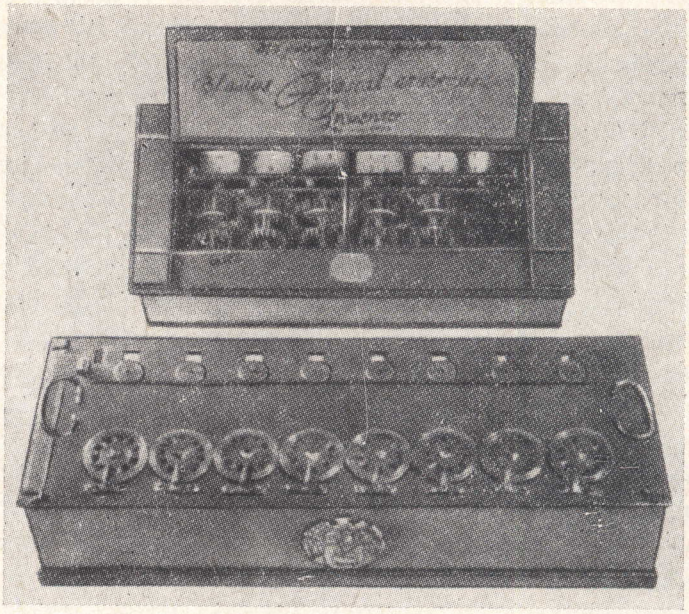
Szkic W. Schickharda jego maszyny rachunkowej: widok z boku i podstawowe połączenia (z notatnika wynalazcy)



Szkic W. Schickharda jego maszyny rachunkowej (z papierów Keplera)



Maszyna rachunkowa W. Schickharda (rekonstrukcja)



Maszyna rachunkowa B. Pascala, egzemplarz z r. 1652 (Muzeum Narodowe Sztuk i Rzemiosł w Paryżu

Akademii berlińskiej — Miscellanea Berolinensia, 1710. W porównaniu ze swymi dwoma poprzednikami Leibniz w sposób istotny zmechanizował operacje mnożenia i dodawania. Jedna z jego maszyn przechowana jest w bibliotece w Hanowerze.

Mimo wysiłków tak wielkich umysłów, jak Pascal i Leibniz, które pokonały zasadnicze trudności w konstrukcji ręcznych maszyn sumujących, ich wynalazkom było jeszcze daleko do tego, żeby znalazło się wielu ich użytkowników i żeby ich produkcja rzemieślnicza była komercjalnie opłacalna. Poszczególne udoskonalenia techniczne, wprowadzone w XVIII w., były jeszcze niewystarczające. Dopiero w ostatniej ćwierci ubiegłego stulecia skonstruowano nowoczesne, wysokiej jakości arytmometry ręczne i rozpoczęła się ich masowa fabryczna produkcja.